Matematični jezik

Logični vezniki – IZJAVNI RAČUN

- resnica $\top$, neresnica $\perp$
- konjunkcija $\varphi \wedge \psi$ "fi in psi"
- disjunkcija $\vartheta \vee \xi$ ali
- implikacija $\alpha \Rightarrow \beta$ $\boxed{\cancel{m(f)}}$ če α potem β
- ekvivalenca $\alpha \Leftrightarrow \beta$ če in samo če
- negacija $\neg \sigma$ ne

Resničnostne tabele

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	$\varphi \Rightarrow \psi$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

- konjunkcija: "in", "ter", "vendar"

- disjunkcija: "ali" "A in/ali B"?

$\rightarrow$ "bodisi P bodisi Q"

$$(\neg P \wedge Q) \vee (\neg Q \wedge P)$$

"velja P ali Q, vendar ne oba."

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

P	Q	$\Downarrow$
$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$

Implikacija, ekvivalenca

$\alpha \Rightarrow \beta$ "če α potem β"

"β če α"

$\alpha \Leftrightarrow \beta$? okrajšava:

$(\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\beta \Rightarrow \alpha)$

$\neg \alpha$ "ne α", "ne velja α", "α ni res"

Kvantifikatorja

PREDIKATNI RAČUN

Univerzalni $\forall$ za vse

Eksistenčni $\exists$ obstaja <u>vsaj eden</u>

"$\forall x \in A \,.\, \varphi$" za vsak x iz A velja φ

$(\forall x \in A)\,\varphi$

$\forall x \in A : \varphi$

$\forall x \in A\,(\ldots\varphi)$

$\cancel{\varphi \quad \forall x \in A}$

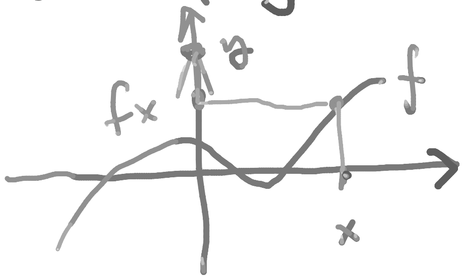
$\forall x \in \mathbb{R} \,.\, x^2 + 3 > -5$

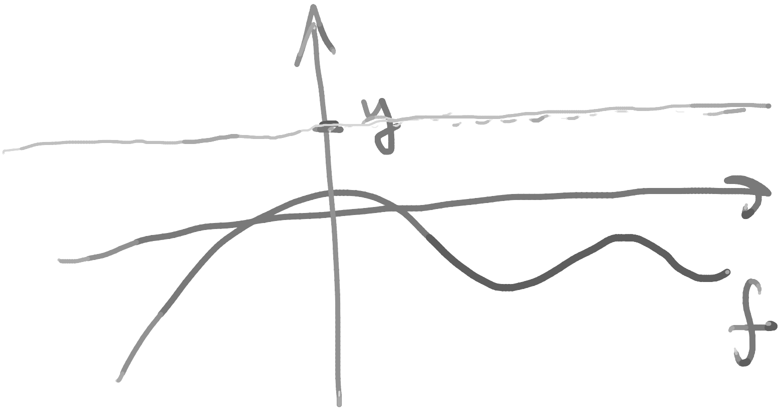
$\exists x \in \mathbb{R} \,.\, f(x) > 0$

Kvantifikatorji

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}. \left(\exists y \in \mathbb{R}. \ f(x) < y\right)$





$\exists y \in \mathbb{R}. \left(\forall x \in \mathbb{R}. \ f(x) < y\right)$

"$\forall š \in \text{Študent}. \ \exists s \in \text{Stol}. \ š$ sedi na s"

$\forall n \in \mathbb{N}. \ \exists p \in \text{Praštevilo}. \ n < p$

Obstaja natanko en, obstajata vsaj dva

"Obstajata vsaj dve praštevili večji od 12."

$\mathbb{P}$ množica vseh praštevil

- $\exists n \in \mathbb{P} .\, n > 12$ "Obstaja vsaj eno večje od 12."
- $\exists n \in \mathbb{P} .\, (\exists m \in \mathbb{P} .\, n > 12 \land m > 12)$ Ni ok. Lahko bi imeli $n = m$
- $(\exists n \in \mathbb{P} .\, n > 12) \land (\exists m \in \mathbb{P} .\, m > 12)$ Ni ok, lahko bi imeli $m = n$.

$\exists n \in \mathbb{P} .\, (\exists m \in \mathbb{P} .\, m \neq n \land n > 12 \land m > 12)$ vsaj dva

Doma: "obstajata natanko dva"

Okrajšave in bližnjice

$$\exists n \in \mathbb{P}. \exists m \in \mathbb{P}. \ldots$$

$$\exists n, m \in \mathbb{P}. \ldots$$

$$\exists n \cancel{\land} m \in \mathbb{P}. \quad n > 12 \land m > 12$$

"x je večji od 7 in manjši od 10."

$$x > 7 \land < 10 \quad ?!$$

$$x > 7 \land x < 10$$

Obstaja natanko en

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

"f ima natanko eno ničlo."

"Obstaja natanko en $x \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = 0$."

$\exists x \in \mathbb{R} . f(x) = 0$ "obstaja vsaj en x, ..."

$$(\exists x \in \mathbb{R} . f(x) = 0) \land \neg(\exists y \in \mathbb{R} . x \neq y \land f(y) = 0)$$

?! "Kaj je ta x?

$\exists x . \cdots \varphi \cdots$

↑ vezan, veljavna samo v φ

$\forall x . \cdots \varphi \cdots$

$$(\exists \cdot \in \mathbb{R} . f(\ ) = 0) \land \neg \exists y \in \mathbb{R} . \exists x \in \mathbb{R} . f(x) = 0$$

Obstaja natanko en

$$\exists x \in \mathbb{R} . (f(x) = 0 \land \neg \exists y \in \mathbb{R} . x \neq y \land f(y) = 0) \quad \checkmark$$

$$\underbrace{(\exists x \in \mathbb{R} . f(x) = 0)}_{\text{obstaja vsaj en}} \land \underbrace{(\forall y, z \in \mathbb{R} . f(y) = 0 \land f(z) = 0 \Rightarrow y = z)}_{\text{vsaka dva sta enaka}}$$

Okrajšava: $\exists! x \in A . \varphi(x)$ — Obstaja natanko en $x \in A$, da $\varphi(x)$

$$\Updownarrow$$

$$(\exists x \in A . \varphi(x)) \land (\forall y, z \in A . \varphi(y) \land \varphi(z) \Rightarrow y = z) \quad \checkmark$$

Kaj pa tole:

$$\forall x \in A . (\varphi(x) \land \forall y \in A . (\varphi(x) \Rightarrow x = y)) \quad \checkmark$$