λ-račun

funkcije

① Funkcijski predpisi

$$x \mapsto x^2+3 \qquad \text{"} x \text{ se slika v } x^2+3\text{"}$$

Imenovana funkcija:

$$f(x) = x^2 + 3 \cdot x + 7 \qquad \text{funkcija } f$$

Lahko tudi:

$$f := \underbrace{(x \mapsto x^2+3\cdot x+7)}_{\substack{\text{funkcijski predpis} \\ \text{anonimna funkcija} \\ \text{neimenovana funkcija}}}$$

$$f(3) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vstavimo } x\to 3}}{=} 3^2+3\cdot 3+7 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nadaljni računski koraki}}}{=} 25$$

$$(x \mapsto x^2+3\cdot x+7)(3) = 3^2+3\cdot 3+7$$

uporaba funkcije na argumentu

Računsko pravilo za funkcijski predpis
(β-redukcija)

$$(x \mapsto e_1)(e_2) := \underbrace{e_1[x\to e_2]}_{\text{substitucija / zamenjava}}$$

"v e_1 zamenjaj x z e_2"

Vezane & proste spremenljivke

x je VEZANA spremenljivka

$$x \mapsto x^2 + 3x + 7 \qquad \text{enaka predpisa}$$

$$a \mapsto a^2 + 3a + 7$$

"argument slikaj v vsoto kvadrata argumenta, trikratnika argumenta in 7."

proste

$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

vezan

Vezane in proste spremenljivke se pojavljajo tudi drugje v matematiki in računalništvu:

$$\int_0^1 (x^2 + ax)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}\right)\Big|_{x=0}^{1} = \frac{1}{3} + \frac{a}{2}$$

- v integralu $\int_0^1 (x^2 + a \cdot x)\, dx$ je x vezana spremenljivka, a je prosta
- v vsoti $\sum_i$ `i*(i-1)` je i vezana spremenljivka
- v limiti `lim_{x → a} (x - a)/(x + a)` je x vezana spremenljivka, a je prosta
- v formuli $\exists\, x \in \mathbb{R}\,.\, x^3 = y$ je x vezana spremenljivka, y je prosta
- v programu

```
s=0
for (int i = 0; i < 10; i++) {
     s += i;
  }
print(s)
```

prosta

vezana

je i vezana spremenljivka, s je prosta.

- v programu

```
  if (false) {
      int s = 0 ;
      for (int i = 0; i < 10; i++) {
         s += i;
      }
  }
```

i vezana, s prosta

i, s vezana

sta s in i vezani spremenljivki.

Pozor: predpis lahko ujame prosto spremenljivko.

$$x \mapsto a + x \qquad \text{"prištej } a\text{"}$$

$$y \mapsto a + y \qquad \text{"prištej } a\text{"}$$

$$a \mapsto a + a \qquad \text{"podvoji"}$$

prosta spremenljivka se je ujela

$$\int_0^1 x^2 + a\cdot x \, dx \qquad\qquad \int_0^1 a^2 + a\cdot a \, da$$

$$\frac{1}{3} + \frac{a}{2} \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$$

Gnezdendeni predpisi

$$x \mapsto e \qquad\qquad\qquad\qquad y \mapsto 9 + y$$

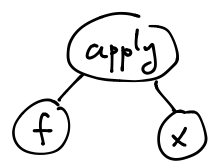
$$(x \mapsto \underbrace{(y \mapsto x \cdot x + y)})(3) = \underbrace{(y \mapsto 3 \cdot 3 + y)}_{\neq\, y \mapsto 9 + y}$$

$f := x \mapsto (y \mapsto x \cdot x + y))$

$f(42)(1)$

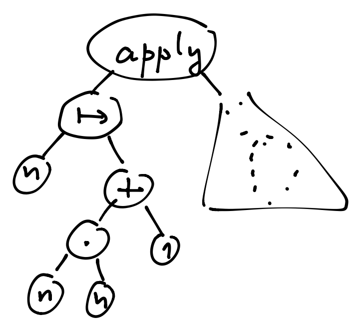
```
(x ↦ (y ↦ x · x + y))(42)  =
(y ↦ 42 · 42 + y)
```

$f(x)$




```
((x ↦ (y ↦ x · x + y))(42))(1)  =
(y ↦ 42 · 42 + y)(1) =
42 · 42 + 1
```

```
(f ↦ f (f (3))) (n ↦ n · n + 1)  =
 (n ↦ n · n + 1) ((n ↦ n · n + 1) (3)) =
 (n ↦ n · n + 1) (3 · 3 + 1) =
 (3 · 3 + 1) · (3 · 3 + 1) + 1
```



$n \mapsto n \cdot n + 1$ ✓

$n + m \mapsto n \cdot n + 1$ NESMISEL

$\int n \cdot n + 1 \; d(m+n)$?!

$\boxed{} \mapsto \boxed{\text{IZRAZ}}$

↑

SPREMENLJIVKA

$f = (n + m \mapsto n \cdot n + 1)$?!

```
def f(n+m):
    return n·n+1
```

* pravilno: $(x \mapsto (y \mapsto x \cdot y^2))\ (z + 1) = (y \mapsto (z + 1) \cdot y^2)$

* narobe: $(x \mapsto (y \mapsto x \cdot y^2))\ (y + 1) = (y \mapsto (y + 1) \cdot y^2)$

* pravilno:

$$(x \mapsto (y \mapsto x \cdot y^2))\ (y + 1) =$$
$$(x \mapsto (a \mapsto x \cdot a^2))\ (y + 1) =$$
$$(a \mapsto (y + 1) \cdot a^2)$$

Pravilo: NAJPREJ preimenuj vse vezane spremenljivke tako, da se vsaka pojavi samo v enem predpisu in nikjer drugje

$$(f \mapsto (y \mapsto f(y) + y))\ (y \mapsto a + y) =$$

$$(f \mapsto (\text{☽} \mapsto f(\text{☽}) + \text{☽}))\ (y \mapsto a + y) =$$

$$\text{☽} \mapsto (y \mapsto a + y)\,\text{☽} + \text{☽}$$

$$\text{☽} \mapsto (a + \text{☽}) + \text{☽}$$

λ - račun

Namesto $x \mapsto e$ pišemo $\lambda x . e$

Dogovori:

- namesto $e_1(e_2)$ pišemo $e_1 \; e_2$

nevidna operacija
aplikacija

$$e_1 \; e_2 \; e_3 = (e_1 \; e_2) \; e_3 \quad \longleftarrow \text{levo asociativna}$$

- λ veže največ, kolikor lahko

$$\lambda x . \; e_1 \; e_2 \; e_3$$

$$((\lambda x . e_1) \; e_2) \; e_3$$

$$(\lambda x . (e_1 \; e_2)) \; e_3$$

$$\lambda x . ((e_1 \; e_2) \; e_3) \quad \checkmark$$

- $(\lambda f . f(f a)) \; \lambda x . x^2 + 1$ NEVLJUDNO

$(\lambda f . f(f a)) \; (\lambda x . x^2 + 1)$ VLJUDNO

- OKRAJŠAVA:

$\lambda x . \lambda y . \lambda z . e$ okrajšamo $\lambda x y z . e$

$\lambda x . (\lambda y . (\lambda z . e))$

$f\,(\lambda x.\ f\,(\lambda y.\,y))\ (\lambda z.\,z)$

$f\,(\lambda x.(f\,(\lambda y.\,y)))\ (\lambda z.\,z)$ PRAV

$f\,((\lambda x.\,f)\,(\lambda y.\,y))\ (\lambda z.\,z)$ NAROBE

Strategije računanja

(λ x . (λ f . f x) (λ y . y)) ((λ z . g z) u)* **Neučakana (eager evaluation):** v izrazu `e₁ e₂` najprej do konca izračunamo `e₁` da dobimo `λ x . e`, nato do konca izračunamo `e₂`, da dobimo `e2'` in šele nato vstavimo `e₂'` v `e`.

redex

redex

tu lahko naredimo

gu

β.- redukcijo

* **Lena (lazy evaluation):** v izrazu `e₁ e₂` najprej izračunamo `e₁`, da dobimo `λ x . e`, nato pa takoj vstavimo `e₂` v `e`.

$(\lambda y.\,y)\,x$

$3 + 7 * x + (-3)$

Poleg tega lahko računamo znotraj abstrakcij ali ne.

$x = (a[3] = 8);$ ①

$y = (3 \cdot a[3]);$ ②

$x + y$

$f(e_1, e_2, e_3)$

$\overbrace{(a[3] = 8) + (3 \cdot a[3])}$

f(get-permission(),
launch_missile(),
reprort-success())

$(i{+}{+} + 8) + 3 \cdot i$

$({+}{+}i + 8) + 3 \cdot i$

→ OK LETA 1975

λ-račun:

$$e_1 \; e_2 \qquad\qquad (\lambda x . e)\; e_2$$

- **Neučakana (eager evaluation):** v izrazu `e₁ e₂` najprej do konca izračunamo `e₁` da dobimo `λ x . e`, nato do konca izračunamo `e₂`, da dobimo `e2'` in šele nato vstavimo `e₂'` v `e`.
- **Lena (lazy evaluation):** v izrazu `e₁ e₂` najprej izračunamo `e₁`, da dobimo `λ x . e`, nato pa takoj vstavimo `e₂` v `e`.

Poleg tega lahko računamo znotraj abstrakcij ali ne.

Izrek (Church-Rosser): λ-račun je konfuenten.

Vrstni red ni pomemben: različni vrstni redi računanja so vedno združljivi

$$\begin{tikzcd}
 & e_1 \arrow[dr, squiggly] & \\
e \arrow[ur, squiggly, "1. način"] \arrow[dr, squiggly, "2. način"'] & & e_3 \\
 & e_2 \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

"diamond property"

λ-račun kot programski jezik

Identita: $\quad id := \lambda x . x$

Konstantna (vedno vrne konstanto c) $\quad \lambda x . c$

Želje: bool $\quad$ if-then-else

nat $\quad 0$, succ, $+$, $\times$,

zanke, rekurzija $\quad$ seznami

```
true := λ x y . x

false := λ x y . y

if := λ b t e . b t e
```

bool then else

"selektor", ki izbira med dvema možnostima:

true = "izberi prvo možnost"

false = "izberi drugo možnost"

if b t e = selektor b izbere med možnostma t in e

$$\text{if true } A\ B = (\lambda b\, t\, e . \underline{b\, t\, e})\ \text{true}\ A\ B$$
$$= \text{true}\ A\ B$$
$$= (\lambda x\, y . x)\ A\ B$$
$$= A$$

$$\text{if false } A\ B = \ldots\ldots = B$$

and b_1 b_2 = if b_1 b_2 false

not b = if b false true

$b_1 \wedge b_2 =$ if b_1 then b_2 else false

Urejeni pari

- pair, first, second

Želene enačbe

first (pair A B) = A

second (pair A B) = B

pair A B   (A, B)

first π_1

second π_2

SPECIFIKACIJA