Logično programiranje

Program = pravila sklepanja (logične formule)

Izvajanje programa = iskanje dokaza glede na dana pravila

Hornove formule

Logična formula zgrajena iz:

$\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ logični vezniki

$\bot$ neresnica, $\top$ resnica

$\forall x$ "za vsak x", $\exists x$ "obstaja x"

Primitivne formule: $\leq$, $=$, p nepovezan q

p je otrok od q

Hornova formula je oblike:

$$\forall x_1, \dots, x_i . (\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \dots \wedge \phi_j \Rightarrow \psi)$$

$\equiv$

Δ

pri čemer so $\phi_1, \dots, \phi_j$ in ψ primitivne formule.

To nas spomni na pravila sklepanja

$$\frac{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_j}{\psi}$$

1. Če veljajo predpostavke $\phi_1, \dots, \phi_j$, potem velja ψ
2. ψ velja, če veljajo $\phi_1, \dots, \phi_j$

Posebna primera:

- $j = 0$: $\forall x_1, \ldots, x_i \,.\, \Psi$
- $i = 0$ $\Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_j \Rightarrow \Psi$ brez spremenljivk

Primeri:

∀ a . (pes(a) ⇒ zival(a))

"Za vsak a velja: če je a pes, potem je a žival."

Primitivna predikata: pes(x) "x je pes"
zival(x) "x je žival"

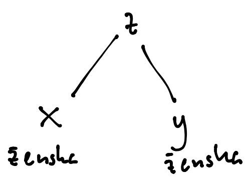
∀ x y z . (otrok(x, y) ∧ otrok(y, z) ∧ zenska(z) ⇒ babica(x, z)).

Če je x otrok od y in y otrok od z in z je ženska, potem je z babica od x

Primitivne relacije: otrok(a, b) "a je otrok od b"
babica(a, b) "b je babica od a"

∀ x y z . otrok(x, z) ∧ otrok(y, z) ∧ zenska(x) ∧ zenska(y) ⇒ ~~sestra~~(x, y)

x = y ali x in y sta sestri
ali x in y sta polsestri



Vaja: seštevanje naravnih števil

- konstanta: zero 0
- konstruktor: succ(x) naslednik

```
Ocaml:
type nat =
  Zero |
  Succ of nat
```

3 ... succ(succ(succ(zero)))

Seštevanje +: Peanovi aksiomi $x + 0 = x$
$x + \mathrm{succ}(y) = \mathrm{succ}(x + y)$

Ideja: Preslikavo $f : A \to B$ predstavimo z relacijo $R \subseteq A \times B$,

$$f(x) = y \iff R(x, y)$$

Namesto vrednosti $f(x)$, uporabimo relacijo "f slika x v y"

Operacijo $x+y$ nadomestimo z relacijo $\mathrm{vsota}(x, y, z)$

$$\mathrm{vsota}(x,y,z) \iff x + y = z$$

Dobimo:

1) $\forall x.\ x + 0 = x$ ...... $\forall x.\ \mathrm{vsota}(x, 0, x)$

2) $\forall x y.\ x + \mathrm{succ}(y) = \mathrm{succ}(\underbrace{x+y}_{x+y=z})$ ..... ?

$$\forall x y.\ \cancel{\mathrm{vsota}(x, \mathrm{succ}(y)}, \mathrm{succ}(x+y))\ !!$$

$$\rightsquigarrow$$

$$\forall x y z.\ \mathrm{vsota}(x,y,z) \Rightarrow \mathrm{vsota}(x, \mathrm{succ}(y), \mathrm{succ}(z))$$

$$\forall x y z.\ x + y = z \Rightarrow x + \mathrm{succ}(y) = \mathrm{succ}(z)$$

Formule, ki niso Hornove:

$$\forall x \in \mathbb{R}.\ \exists y \in \mathbb{R}.\ 3y^3 + 7x = 2.$$

Kako iščemo dokaz? Primer:

Ali iz:

1. X ∧ Y ⇒ C
2. A ∧ B ⇒ C
3. X ⇒ B
4. A ⇒ B
5. A

sledi C?

$$\dfrac{\dfrac{?}{X} \qquad \dfrac{?}{Y}}{C}\,(1) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{}{A}\,(5) \qquad \dfrac{\dfrac{}{A}\,(5)}{B}\,(4)}{C}\,(2) \quad \checkmark$$

Ail iz:.

1. ∀ x y . otrok(x, y) ⇒ mlajsi(x, y)
2. otrok(miha, mojca)

sledi mlajsi(miha, mojca)?

$$\dfrac{\dfrac{}{\text{otrok(miha, mojca)}}\,(2)}{\text{mlajsi(miha, mojca)}}\,(1) \qquad \begin{array}{l} x = \text{miha} \\ y = \text{mojca} \end{array}$$

Ali iz

1. ∀ x . sodo(x) ⇒ liho(succ(x))
2. ∀ y . liho(y) ⇒ sodo(succ(y))
3. sodo(zero)

sledi sodo(succ(succ(zero)))?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\text{sodo(zero)}}\,(3)}{\text{liho(succ(zero))}}\,(1)\ \begin{array}{l}\text{succ}(x) = \text{succ(zero)} \\ x = \text{zero}\end{array}}{\text{sodo(succ(succ(zero)))}}\,(2)\ \begin{array}{l}\text{succ}(y) = \text{succ(succ(zero))} \\ y = \text{succ(zero)}\ \checkmark\end{array}$$

Uporaba ∨ v Hornovi formuli:

$A \vee B \Rightarrow C$ to je ekvivalentno

$(A \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow C)$

Primer:

$(A_1 \vee A_2) \wedge (B_1 \vee B_2) \Rightarrow C$

predelamo na

$(A_1 \wedge B_1) \vee (A_2 \wedge B_1) \vee (A_1 \wedge B_2) \vee (A_2 \wedge B_2) \Rightarrow C$

ekvivalentno štirim pravilom

$A_1 \wedge B_1 \Rightarrow C$

$A_2 \wedge B_1 \Rightarrow C$

$A_1 \wedge B_2 \Rightarrow C$

$A_2 \wedge B_2 \Rightarrow C$

Stikanje seznamov

$$[\underbrace{a}_{A}, \underbrace{x_1, \dots, x_n}_{X}] \,@\, [\underbrace{y_1, \dots, y_m}_{Y}] = [\underset{A}{a}, \underbrace{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m}_{Z}]$$

join(X, Y, Z)