

Seznami, vektorji in matrike

Tokrat bomo spoznali osnovne metode za delo s seznamami, tabelami, vektorji in matrikami. V Mathematici so sezname in tabele ista podatkovna struktura, matrike pa so sezname seznamov.

Anonimne (neimenovane) funkcije

Matematično preslikavo, ki preslika x v izraz e običajno zapišemo

$$x \mapsto e$$

in preberemo " x se preslika v e ". (Primer: $x \mapsto x + x^2$) V Mathematici zapišemo tako preslikavo kot `Function[x, e]`. Če ima funkcija več neodvisnih spremenljivk, jih naštejemo v zavutih oklepajih. Takim preslikavam pravimo *neimenovane ali anonimne funkcije*.

<code>Function[x, e]</code>	funkcija, ki preslika x v e
<code>Function[{x₁, ..., x_n}, e]</code>	funkcija, ki preslika (x_1, \dots, x_n) v e

Uporabljamo jo povsem enako, kot navadne (imnovane) funkcije:

```
g[x_] := x + x^2
```

```
g[3]
```

```
12
```

```
Function[x, x+x^2][3]
```

```
12
```

```
h[x_, y_] := x + y - x * y
```

```
h[3, 5]
```

```
-7
```

```
Function[{x, y}, x + y - x * y][3, 5]
```

```
-7
```

Posebej velja omeniti funkcije, ki vrnejo vrednost **True** ali **False**. Takim funkcijam pravimo *predikati*. Na primer, predikat $p[x]$, ki je definiran z $x > 0 \wedge x^2 - 7 < 0$ lahko definiramo takole:

```
ClearAll[p]
```

```
p[x_] := x > 0 && x^2 - 7 < 0
```

Lahko pa ga tudi zapišemo kot neimenovani predikat:

```
Function[x, x > 0 && x^2 - 7 < 0]
```

```
Function[x, x > 0 && x^2 - 7 < 0]
```

```
p[3]
```

```
False
```

```
Function[x, x > 0 && x^2 - 7 < 0][3]
```

```
False
```

Okrajšana notacija

Mathematica pozna posebno okrajšano notacijo za neimenovane funkcije, ki pa je zelo nečitljiva in jo odsvetujem. Izraz oblike $(e) \&$, v katerem nastopa simbol $\#$, pomeni neimenovano funkcijo, ki preslika $\#$ v izraz e . Na primer, funkcijo

```
Function[x, x + Sin[2 x]]
Function[x, x + Sin[2 x]]
```

lahko zapišemo tudi takole:

```
(# + Sin[2 #]) &
#1 + Sin[2 #1] &
```

Preizkusimo:

```
(# + Sin[2 #]) &[y]
y + Sin[2 y]
```

Če imamo več neodvisnih spremenljivk, jih poimenujemo $\#1, \#2, \dots$, na primer:

```
Function[{x, y}, {Sin[x + y] + Cos[x - y]}][u, v]
{Cos[u - v] + Sin[u + v]}
(Sin[#1 + #2] + Cos[#1 - #2]) &[u, v]
Cos[u - v] + Sin[u + v]
```

Kdor ne verjame, da je ta notacija nečitljiva, naj se zamisli nad naslednjim izrazom, ki izračuna $10!$:

```
(If[# == 0, 1, # * #0[# - 1]]) &[10]
3 628 800
10 !
3 628 800
```

Seznami

Seznane pišemo med zavite oklepaje, elemente seznama pa ločimo z vejicami. V Mathematici ni nobene razlike med *seznamom*, *vektorjem* in *tabelo*.

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	seznam, vektor ali tabela elementov a_1, a_2, \dots, a_n
$\{\}$	prazen seznam, vektor ali tabela

Nekaj osnovnih operacij s seznamami:

Length[s]	dolžina seznama s
First[s]	prvi element seznama s
Last[s]	zadnji element seznama s
Rest[s]	seznam s brez prvega elementa

```
Length[{x, y, z, 1, 2, 3}]
6
First[{x, y, z, 1, 2, 3}]
x
```

```
First[{}]
```

```
First::first: {} has a length of zero and no first element. >>
```

```
First[{}]
```

```
Last[{x, y, z, 1, 2, 3}]
```

```
3
```

```
Rest[{x, y, z, 1, 2, 3}]
```

```
{y, z, 1, 2, 3}
```

Operacije s seznamami

Range

Elemente danega seznama lahko vedno naštejemo med zavritimi oklepaji. Pogosto pa je to nepraktično, saj znamo elemente izračunati s kakim predpisom. Najpreprostejši ukaz, ki naredi nov seznam, je **Range**.

Range [<i>n</i>]	seznam naravnih števil od 1 do <i>n</i>
Range [<i>a</i> , <i>b</i>]	seznam števil <i>a</i> , <i>a</i> + 1, <i>a</i> + 2, ..., <i>b</i>
Range [<i>a</i> , <i>b</i> , <i>k</i>]	seznam števil <i>a</i> , <i>a</i> + <i>k</i> , <i>a</i> + 2 <i>k</i> , ..., <i>b</i>

```
Range[10]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

```
Range[13, 27]
```

```
{13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27}
```

```
Range[0, 100, 9]
```

```
{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99}
```

Range deluje tudi z necelimi števili:

```
Range[0, 2 Pi, Pi / 4]
```

```
{0,  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{5\pi}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{7\pi}{4}$ ,  $2\pi$ }
```

```
Range[ $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{100}$ ,  $\sqrt{2}$ ]
```

```
{ $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ,  $2\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ,  $3\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ,  $4\sqrt{2} + \sqrt{7}$ ,  $5\sqrt{2} + \sqrt{7}$ }
```

Table

Kadar znamo izračunati *k*-ti element seznama iz indeksa *k*, uporabimo ukaz **Table**:

Table [<i>e</i> [<i>k</i>], { <i>k</i> , <i>n</i> , <i>m</i> }]	seznam števil <i>e</i> [<i>n</i>], <i>e</i> [<i>n</i> + 1], ..., <i>e</i> [<i>m</i>]
Table [<i>e</i> [<i>k</i>], { <i>k</i> , <i>m</i> }]	seznam števil <i>e</i> [1], <i>e</i> [2], ..., <i>e</i> [<i>m</i>]
Table [<i>e</i> [<i>k</i>], { <i>k</i> , <i>n</i> , <i>m</i> , <i>d</i> }]	seznam števil <i>e</i> [<i>n</i>], <i>e</i> [<i>n</i> + <i>d</i>], <i>e</i> [<i>n</i> + 2 <i>d</i>], ..., <i>e</i> [<i>m</i>]

```
Table[k^2, {k, 1, 10}]
```

```
{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

4 | Seznam_i_vektorji_tabele.nb

```
Table[Binomial[6, k] x^k y^{6-k}, {k, 0, 6}]  
{y^6, 6 x y^5, 15 x^2 y^4, 20 x^3 y^3, 15 x^4 y^2, 6 x^5 y, x^6}
```

```
Table[Sin[x], {x, 0, Pi, Pi/8}]  
{0, Sin[Pi/8], 1/Sqrt[2], Cos[Pi/8], 1, Cos[Pi/8], 1/Sqrt[2], Sin[Pi/8], 0}
```

Join

Enega ali več seznamov staknemo z ukazom **Join**:

```
Join[s1, ..., sn]      stakni seznane s1, ..., sn
```

```
Join[{a, b, c}, {x, y, z}]
```

```
{a, b, c, x, y, z}
```

```
Join[{a}, {b}, {a, b, c}, {a, b, c}]
```

```
{a, b, a, b, c, a, b, c}
```

Union, Intersection in Complement

Včasih seznam elementov obravnavamo kot množico, se pravi, da se ne oziramo na vrstni red elementov. Osnovne operacije nad množicami so **Union**, **Intersection** in **Complement**. Te operacije vedno uredijo elemente seznama po vrsti in izločijo večkratne kopije enega elementa.

```
Union[s1, ..., sn]      unija množic predstavljenih s seznamami s1, ..., sn
```

```
Intersection[s1, ..., sn]      presek množic predstavljenih s seznamami s1, ..., sn
```

```
Complement[s, t]      razlika med množicama s in t
```

```
Union[{a, b, c}, {a, x, y}]
```

```
{a, b, c, x, y}
```

```
Union[{b, a, a, a, a, b, a, b}, {y, x}]
```

```
{a, b, x, y}
```

```
Union[{a, b, c, a, b, d, e}]
```

```
{a, b, c, d, e}
```

```
Intersection[{a, x, b, c}, {a, x, y}]
```

```
{a, x}
```

```
Intersection[{a, b}, {a, a}, {a, c}, {a, d}]
```

```
{a}
```

```
Complement[{7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 1}, {2, 5}]
```

```
{1, 3, 4, 6, 7}
```

Select

Z ukazom **Select** iz danega seznama izberemo elemente, ki zadoščajo danemu predikatu.

```
Select[s, p]      seznam tistih elementov seznama s, ki zadoščajo pogoju p
```

```
Select[{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, EvenQ]
```

```
{2, 4, 6, 8}
```

```
Select[Range[1000], PrimeQ]
```

```
{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83,
89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173,
179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263,
269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359,
367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457,
461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523, 541, 547, 557, 563, 569,
571, 577, 587, 593, 599, 601, 607, 613, 617, 619, 631, 641, 643, 647, 653, 659,
661, 673, 677, 683, 691, 701, 709, 719, 727, 733, 739, 743, 751, 757, 761, 769,
773, 787, 797, 809, 811, 821, 823, 827, 829, 839, 853, 857, 859, 863, 877, 881,
883, 887, 907, 911, 919, 929, 937, 941, 947, 953, 967, 971, 977, 983, 991, 997}
```

```
Select[Range[100], Function[k, Mod[k, 3] == 1 && Mod[k, 5] == 2]]
```

```
{7, 22, 37, 52, 67, 82, 97}
```

Map

Z ukazom **Map** elemente danega seznama preslikamo z dano funkcijo in dobimo nov seznam.

```
Map[f, {x1 ..., xn}]      Seznam {f[x1], ..., f[xn]}
```

```
Map[f, {x, y, z, u, v, w}]
```

```
{f[x], f[y], f[z], f[u], f[v], f[w]}
```

```
Map[Function[x, x^2], Range[10]]
```

```
{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100}
```

```
Map[Sin, Table[k π / 6, {k, 0, 11}]]
```

```
{0, 1/2, √3/2, 1, √3/2, 1/2, 0, -1/2, -√3/2, -1, -√3/2, -1/2}
```

Vektorji in matrike

Kadar obravnavamo seznam s kot tabelo ali vektor, dobimo k -ti element z izrazom $s[[k]]$. Negativni indeksi pomenijo, da štejemo od zadnjega proti prvemu elementu.

```
s[[k]]       $k$ -ti element tabele  $s$ . Indeksi se štejejo od 1 dalje!
```

Dvojnje oklepaje lahko prikažemo tudi lepše, če natičkamo `ESC[[ESC in ESC]]ESC`: $s[[k]]$

```
s = {a, b, c, d, e, f}
```

```
{a, b, c, d, e, f}
```

```
s[[1]]
```

```
a
```

```
s[[ -2]]
```

```
e
```

Spremenljivka **s** se obnaša kot tabela. Njene vrednosti lahko nastavljamo:

```
s[[2]] = 1000
```

```
1000
```

```
s
```

```
{a, 1000, c, d, e, f}
```

Matrika je tabela tabel enakih velikosti. Matrike lahko naredimo z ukazom **Table**, če podamo dvojni indeks.

```
ClearAll[h]
```

```
h[n_] := Table[1 / (j + k), {j, 1, n}, {k, 1, n}]
```

```
h[6]
```

```
{ {1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7}, {1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8}, {1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9},
  {1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10}, {1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11}, {1/7, 1/8, 1/9, 1/10, 1/11, 1/12} }
```

Tak izpis je precej nečitljiv. Za lepši prikaz matrike uporabimo **MatrixForm**

```
h[6] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} & \frac{1}{11} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

Opozoriti velja na razliko med n -dimenzionalnim vektorjem, matriko velikosti $1 \times n$ in matriko velikosti $n \times 1$:

$\{a_1, \dots, a_n\}$	n -dimenzionalni vektor
$\{\{a_1, \dots, a_n\}\}$	matrika velikosti $1 \times n$
$\{\{a_1\}, \dots, \{a_n\}\}$	matrika velikosti $n \times 1$

Razlika med temi zapisi se vidi, ko uporabimo operator \cdot , ki računa bodisi skalarni produkt bodisi matrični produkt, odvisno od tega, kakšne argumente mu podamo:

Skalarni produkt vektorjev:

```
{x, y, z} . {a, b, c}
```

```
a x + b y + c z
```

Matrični produkt:

```
{{x}, {y}, {z}} . {{a, b, c}} // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} a x & b x & c x \\ a y & b y & c y \\ a z & b z & c z \end{pmatrix}$$

```
{{a, b, c}} . {{x}, {y}, {z}}
```

```
{a x + b y + c z}
```

Osnovne operacije z matrikami in vektorji:

$u \cdot v$	skalarni produkt vektorjev u in v
$a \cdot b$	skalarni produkt matrik a in b
Cross [a, b] ali $a \times b$	vektorski produkt

Dimensions[a]	dimenzije matrice a
Det[a]	determinanta matrice a
Transpose[a]	transponirana matrika matrice a
Tr[a]	sled matrice a
Inverse[a]	inver matrice a

```
Cross[{a, b, 0}, {1, 1, 1}]
```

```
{b, -a, a - b}
```

```
Dimensions[Table[1, {i, 1, 10}, {j, 1, 5}]]
```

```
{10, 5}
```

```
Det[h[10]]
```

```
1
```

```
8 537 000 898 240 926 708 833 515 201 784 986 712 482 596 782 080 000 000 000
```

```
Transpose[{{1, 2, 3, 4, 5, 6}}]
```

```
{{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}}
```

Transpozicije vektorja ne moremo izračunati s **Transpose**:

```
Transpose[{1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

```
Transpose::nmtx: The first two levels of the  
one-dimensional list {1, 2, 3, 4, 5, 6} cannot be transposed. >>
```

```
Transpose[{1, 2, 3, 4, 5, 6}]
```

Vektor je treba prej predelati v matriko velikosti $n \times 1$:

```
v = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

```
w = Map[Function[x, {x}], v]
```

```
{1, 2, 3, 4, 5, 6}
```

```
{{1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}}
```

```
w // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

```
Transpose[w] // MatrixForm
```

```
( 1 2 3 4 5 6 )
```

Poleg osnovnih operacij z matrikami zna Mathematica računati tudi lastne vrednosti, lastne vektorje, lastne podprostore, Jordanovo formo, LU-dekompozicijo, QR-dekompozicijo, SUV-dekompozicijo itn. Več o tem si preberite v dokumentaciji. Nekatere operacije ponazorimo s primeri:

```
h[5] // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

CharacteristicPolynomial [h[5], x]

$$\frac{1}{67212633600000} - \frac{48917x}{2240421120000} + \frac{227491x^2}{762048000} - \frac{576593x^3}{6350400} + \frac{137x^4}{120} - x^5$$

Eigenvalues [h[5]]

```
{Root[-1 + 1467510 #1 - 20064706200 #1^2 +
  6102660312000 #1^3 - 76734423360000 #1^4 + 67212633600000 #1^5 &, 5],
Root[-1 + 1467510 #1 - 20064706200 #1^2 + 6102660312000 #1^3 -
  76734423360000 #1^4 + 67212633600000 #1^5 &, 4],
Root[-1 + 1467510 #1 - 20064706200 #1^2 + 6102660312000 #1^3 -
  76734423360000 #1^4 + 67212633600000 #1^5 &, 3],
Root[-1 + 1467510 #1 - 20064706200 #1^2 + 6102660312000 #1^3 -
  76734423360000 #1^4 + 67212633600000 #1^5 &, 2],
Root[-1 + 1467510 #1 - 20064706200 #1^2 + 6102660312000 #1^3 -
  76734423360000 #1^4 + 67212633600000 #1^5 &, 1]}
```

Eigenvalues [h[5]] // N

```
{1.05595, 0.0822854, 0.00335759, 0.0000741367, 6.87895 × 10-7}
```

```
a = Table[Mod[i + j, 2], {i, 1, 5}, {j, 1, 5}];
```

```
a // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

```
{q, r} = QRDecomposition[a];
```

```
q // MatrixForm
```

```
r // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$