

Ravninska geometrija

Ravninska geometrija v Mathematici

V Mathematici lahko dokažemo osnovne izreke iz ravninske geometrije na zelo brutalen način: v ravnino vpeljemo koordinatni sistem in vse računamo analitično s pomočjo koordinat. Dobimo komplicirane formule, ki pa jih zna Mathematica poenostaviti.

Kako v Mathematici predstavimo geometrijske objekte

V ravninski geometriji imamo opravka z osnovnimi pojmi *točka*, *premica*, *daljica*, *kot* in *krog*. V Mathematici te pojme predstavimo simbolno:

Točko s koordinatama (x, y) predstavimo z izrazom `točka[x, y]`.

Premico, ki je določena z enačbo $ax + by = c$ predstavimo z izrazom `premica[a, b, c]`. Opomba: eksplicitna enačba premice $y = kx + n$ ni primerna, ker z njo ne moremo predstaviti navpične premice.

Daljico s krajiščema p in q predstavimo z izrazom `daljica[p, q]`. Na primer, daljica med točkama `točka[1, 2]` in `točka[-3, 1]` je predstavljena z izrazom `daljica[točka[1, 2], točka[-3, 1]]`.

Trikotnik z oglišči p , q , r predstavimo z izrazom `trikotnik[p, q, r]`.

Kot z vrhom pri p in krakoma, ki ga določata točki q in r predstavimo z izrazom `kot[p, q, r]`.

Krožnico s središčem v točki p in polmerom r predstavimo z izrazom `krožnica[p, r]`. Na primer, enotska krožnica je predstavljena z izrazom `krožnica[točka[0, 0], 1]`.

Osnovne geometrijske konstrukcije

Napišimo nekaj osnovnih funkcij za geometrijske konstrukcije.

■ Pomožne funkcije

Točke v ravnini lahko obravnavamo tudi kot vektorje, zato definiramo seštevanje in odštevanje točk. Dodamo še pravilo, ki pove, da sta točki enaki, če imata enake koordinate:

```
točka /: (točka[x_, y_] == točka[u_, v_]) := (x == u && y == v)
točka /: (točka[x_, y_] + točka[u_, v_]) := točka[x + u, y + v]
točka /: (točka[x_, y_] - točka[u_, v_]) := točka[x - u, y - v]
```

Normirani vektor:

$$\text{normirana}[\text{točka}[\mathbf{x}, \mathbf{y}]] := \text{točka}\left[\frac{\mathbf{x}}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}}, \frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2}}\right]$$

■ Premica določena z dvema točkama:

Enačba premice, ki poteka skozi točki (u, v) in (s, t) :

```
Solve[{a u + b v == c, a s + b t == c}, {a, b}]
{{a -> -\frac{-ct + cv}{tu - sv}, b -> -\frac{-cs + cu}{-tu + sv}}}
```

Če vzamemo $c = tu - sv$, se imenovalci pokrajšajo in dobimo enačbo premice

$$(t - v)x + (u - s)y = tu - sv.$$

Napišimo funkcijo, ki izračuna premico skozi dani točki:

```
premica[točka[u_, v_], točka[s_, t_]] := premica[t - v, u - s, t * u - s * v]
```

Napišimo še funkcijo, ki vrne nosilko daljice:

```
nosilka[daljica[p_, q_]] := premica[p, q]
```

Primer:

```
premica [tocka [1, 1], tocka [-1, 0]]
```

```
premica [-1, 2, 1]
```

■ Presečišče premic:

Presečišče premic $ax + by = c$ in $dx + ey = f$:

```
Solve[{a x + b y == c, d x + e y == f}, {x, y}] // Simplify
```

$$\left\{ \left\{ x \rightarrow \frac{ce - bf}{-bd + ae}, y \rightarrow \frac{cd - af}{bd - ae} \right\} \right\}$$

Napišimo funkcijo, ki izračuna presečišče premic:

```
tocka [premica [a_, b_, c_], premica [d_, e_, f_]] := tocka [
   $\frac{c * e - b * f}{a * e - b * d}$ ,  $\frac{a * f - c * d}{a * e - b * d}$ ]
```

Primer:

```
tocka [premica [1, -1, -1], premica [2, 3, 0]]
```

$$\text{tocka} \left[-\frac{3}{5}, \frac{2}{5} \right]$$

■ Pravokotnica na premico skozi dano točko:

Enačba pravokotnice na premico $ax + by = c$ skozi točko (u, v) je

$$-bx + ay = -bu + av.$$

```
pravokotnica [premica [a_, b_, _], tocka [u_, v_]] := premica [-b, a, -b * u + a * v]
```

Primer:

```
pravokotnica [premica [0, 1, 0], tocka [0, 0]]
```

```
premica [-1, 0, 0]
```

■ Vzporednica k premici skozi dano točko:

```
vzporednica [premica [a_, b_, _], tocka [u_, v_]] := premica [a, b, a * u + b * v]
```

Primer:

```
vzporednica [premica [1, 2, 7], tocka [-2, 3]]
```

```
premica [1, 2, 4]
```

■ Razpolovišče in simetrala daljice:

```
razpolovisce [tocka [u_, v_], tocka [s_, t_]] := tocka [(u + s) / 2, (v + t) / 2]
```

```
razpolovisce [daljica [p_tocka, q_tocka]] := razpolovisce [p, q]
```

```
simetrala [d_daljica] := pravokotnica [nosilka [d], razpolovisce [d]]
```

```
simetrala [p_tocka, q_tocka] := simetrala [daljica [p, q]]
```

Primer:

```
simetrala [daljica [tocka [0, 0], tocka [2, 1]]]
```

$$\text{premica} \left[2, 1, \frac{5}{2} \right]$$

■ Simetrala kota

```
simetrala [kot [p_, q_, r_]] :=
```

```
premica [p, p + razpolovisce [normirana [q - p], normirana [r - p]]]
```

Primer:

```
simetrala[kot[tocka[0, 0], tocka[x, y], tocka[u, v]]]
```

$$\text{premica}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \frac{1}{2}\left(-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), 0\right]$$

■ Pravokotnost premic:

Napišimo predikat `pravokotniQ[p, q]`, ki vrne `True`, če sta premici `p` in `q` pravokotni:

```
pravokotniQ[premica[a_, b_, _], premica[d_, e_, _]] := (a*d + b*e == 0)
```

Primer:

```
pravokotniQ[premica[0, 1, 0], premica[1, 0, 0]]
```

```
True
```

```
pravokotniQ[premica[1, 1, 0], premica[-1, -1, 0]]
```

```
False
```

■ Vzporednost premic

```
vzporedniQ[premica[a_, b_, _], premica[d_, e_, _]] := (a*e - b*d == 0)
```

Primer:

```
vzporedniQ[premica[1, 2, 0], premica[-3, -6, 10]]
```

```
True
```

■ Pripadnost točke premici

Predikat `pripadaQ[t, p]` vrne `True`, če točka `t` leži na premici `p`.

```
pripadaQ[tocka[u_, v_], premica[a_, b_, c_]] := (a*u + b*v == c)
```

Primer:

```
pripadaQ[tocka[10, 11], premica[-1, 1, 2]]
```

```
False
```

■ Kolinearnost točk

```
kolinearneQ[p_, q_, r_] := pripadaQ[p, premica[q, r]]
```

Če v funkcijo `kolinearneQ` vstavimo splošne koordinate, dobimo enačbo, ki izraža dejstvo, da so tri točke kolinearne:

```
kolinearneQ[tocka[x1, y1], tocka[x2, y2], tocka[x3, y3]] // Simplify
```

$$x_2 y_1 + x_3 (-y_1 + y_2) + x_1 (-y_2 + y_3) == x_2 y_3$$

■ Konkurentnost premic

Pravimo, da so premice `p`, `q` in `r` konkurentne, če se sekajo v skupni točki.

Napišimo predikat `konkurentneQ[p, q, r]`, ki vrne `True`, če so dane premice konkurentne:

```
konkurentneQ[p_premica, q_premica, r_premica] := pripadaQ[tocka[p, q], r]
```

Poglejmo, kakšno formulo dobimo v splošnem:

```
konkurentneQ[premica[aa1, bb1, cc1],  
  premica[aa2, bb2, cc2], premica[aa3, bb3, cc3]] // Simplify
```

$$\frac{bb_3 (-aa_2 cc_1 + aa_1 cc_2) + aa_3 (bb_2 cc_1 - bb_1 cc_2)}{-aa_2 bb_1 + aa_1 bb_2} == cc_3$$

■ Razdalja med točkama

Funkcija `razdalja2[p, q]` izračuna kvadrat razdalje med točkama `p` in `q`.

```
razdalja2[tocka[u_, v_], tocka[s_, t_]] := (u - s)^2 + (v - t)^2
```

Funkcija `razdalja[p, q]` izračuna razdaljo med točkama `p` in `q`.

```
razdalja[p_tocka, q_tocka] := Sqrt[razdalja2[p, q]]
```

Kadar dokazujemo, da sta razdalji d_1 in d_2 enaki, je običajno lažje dokazati, da sta enaka njuna kvadrata. Zato bo pri dokazovanju izrekov prav prišla predvsem funkcija `razdalja2`.

▪ Razdalja med točko in premico

```
razdalja2[tocka[x_, y_], premica[a_, b_, c_]] := 
$$\frac{(a * x + b * y - c)^2}{a^2 + b^2}$$

```

```
razdalja[t_tocka, p_premica] := 
$$\sqrt{\text{razdalja2}[t, p]}$$

```

Primer:

```
razdalja[tocka[1, 1], premica[1, 1, 0]]
```

$\sqrt{2}$

▪ Pravokotna projekcija točke na premico

```
Solve[{pripadaQ[tocka[u, v], premica[a, b, c]],  
pravokotniQ[premica[a, b, c], premica[tocka[x, y], tocka[u, v]]], {u, v}] // Simplify
```

```
{ {u -> 
$$\frac{a c + b^2 x - a b y}{a^2 + b^2}, v -> \frac{b c - a b x + a^2 y}{a^2 + b^2} } }$$

```

```
projekcija[tocka[x_, y_], premica[a_, b_, c_]] := tocka[
$$\frac{a c + b^2 x - a b y}{a^2 + b^2}, \frac{b c - a b x + a^2 y}{a^2 + b^2}$$
]
```

▪ Zrcaljenje točke čez premico

```
Solve[tocka[premica[a, b, c], pravokotnica[premica[a, b, c], tocka[x, y]]] ==  
razpolovisce[tocka[x, y], tocka[u, v]], {u, v}] // Simplify
```

```
{ {u -> 
$$\frac{2 a c - a^2 x + b^2 x - 2 a b y}{a^2 + b^2}, v -> \frac{2 b c - 2 a b x + a^2 y - b^2 y}{a^2 + b^2} } }$$

```

```
zrcali[tocka[x_, y_], premica[a_, b_, c_]] :=
```

```
tocka[
$$\frac{2 a c - a^2 x + b^2 x - 2 a b y}{a^2 + b^2}, \frac{2 b c - 2 a b x + a^2 y - b^2 y}{a^2 + b^2}$$
]
```

Primer:

```
zrcali[tocka[1, 2], premica[1, -1, 0]]
```

tocka[2, 1]

Grafični prikaz geometrijskih konstrukcij

Napišimo funkcijo `slika[lst]`, ki sprejme seznam geometrijskih objektov `tocka`, `daljica`, `kot` in `kroznica` ter grafične ukaze. Funkcija vrne seznam grafičnih ukazov, ki narišejo dane geometrijske objekte.

```

narisi[tocka[u_, v_]] := {AbsolutePointSize[6], Point[{u, v}]}

narisi[daljica[tocka[u_, v_], tocka[s_, t_]]] := Line[{u, v}, {s, t}]

narisi[premica[a_, 0, c_]] := Line[{c/a, -100}, {c/a, 100}]
narisi[premica[a_, b_, c_]] := Line[{-100, (c + 100 a) / b}, {100, (c - 100 a) / b}]

narisi[kroznica[tocka[x_, y_], r_]] := Circle[{x, y}, r]

narisi[trikotnik[tocka[x_, y_], tocka[u_, v_], tocka[s_, t_]]] :=
  {AbsolutePointSize[4], Point[{x, y}], Point[{u, v}], Point[{s, t}],
  Line[{x, y}, {u, v}, {s, t}, {x, y}]}

narisi[c_] := c

slika[lst_List] := Graphics[narisi /@ lst, AspectRatio -> Automatic]

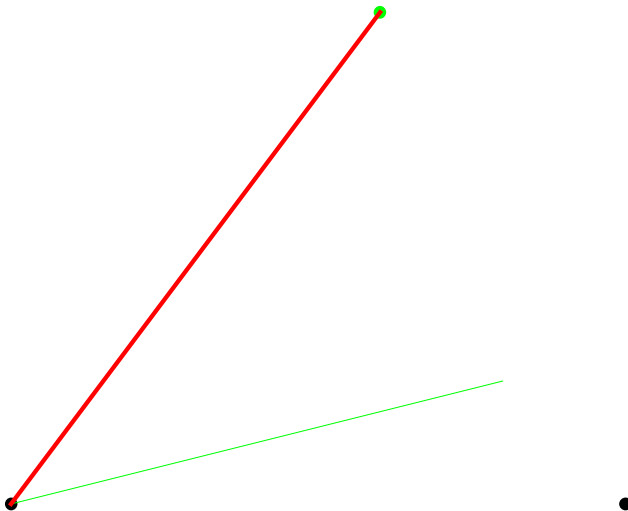
```

Primer uporabe:

```

Show[slika[{tocka[0, 0], tocka[5, 0], RGBColor[0, 1, 0],
  tocka[3, 4], daljica[tocka[0, 0], tocka[4, 1]], RGBColor[1, 0, 0],
  AbsoluteThickness[2], daljica[tocka[0, 0], tocka[3, 4]]}]

```



Izreki

Sedaj bomo z Mathematico dokazovali izreke v ravninski geometriji. Ideja je preprosta: vse naredimo s splošnimi koordinatami in računamo analitično. Res dobimo velike in nepregledne izraze, a Mathematica jih zna poenostaviti.

Omejili se bomo na osnovne izreke o trikotnikih. Definirajmo tri splošne točke v ravnini, ki bodo služile kot oglišča trikotnika:

```

a = tocka[x1, y1];
b = tocka[x2, y2];
c = tocka[x3, y3];

```

```

premica[a, b]

```

```

premica[-y1 + y2, x1 - x2, -x2 y1 + x1 y2]

```

Opomba: izhodišče koordinatnega sistema bi lahko posavili v točko a. V tem primeru bi veljalo $x_1 = 0$ in $y_1 = 0$, kar bi nekoliko poenostavilo izračune. Poleg tega bi lahko točko b brez izgube splošnosti postavili v $b = \text{tocka}[1, 0]$.

Očrtani krog**simetrala [a, b]**

$$\text{premica} \left[-x_1 + x_2, -y_1 + y_2, \frac{1}{2} (-x_1 + x_2) (x_1 + x_2) + \frac{1}{2} (-y_1 + y_2) (y_1 + y_2) \right]$$

Izrek: Simetrale stranic trikotnika se sekajo v skupni točki, ki je središče trikotniku očrtanega kroga.

Ali se simetrale sekajo v eni točki, ugotovimo s funkcijo **konkurentneQ**:

konkurentneQ [**simetrala [a, b],****simetrala [b, c],****simetrala [c, a]****]**

$$\begin{aligned} & \left((y_1 - y_3) \left(-(-x_2 + x_3) \left(\frac{1}{2} (-x_1 + x_2) (x_1 + x_2) + \frac{1}{2} (-y_1 + y_2) (y_1 + y_2) \right) + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (-x_1 + x_2) \left(\frac{1}{2} (-x_2 + x_3) (x_2 + x_3) + \frac{1}{2} (-y_2 + y_3) (y_2 + y_3) \right) \right) \right) / \\ & \quad \left(-(-x_2 + x_3) (-y_1 + y_2) + (-x_1 + x_2) (-y_2 + y_3) \right) + \\ & \left((x_1 - x_3) \left(\left(\frac{1}{2} (-x_1 + x_2) (x_1 + x_2) + \frac{1}{2} (-y_1 + y_2) (y_1 + y_2) \right) (-y_2 + y_3) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. (-y_1 + y_2) \left(\frac{1}{2} (-x_2 + x_3) (x_2 + x_3) + \frac{1}{2} (-y_2 + y_3) (y_2 + y_3) \right) \right) \right) / \\ & \quad \left(-(-x_2 + x_3) (-y_1 + y_2) + (-x_1 + x_2) (-y_2 + y_3) \right) = \frac{1}{2} (x_1 - x_3) (x_1 + x_3) + \frac{1}{2} (y_1 - y_3) (y_1 + y_3) \end{aligned}$$

Ali je ta enačba veljavna? Poenostavimo jo z ukazom **Simplify**:

konkurentneQ [simetrala [a, b], simetrala [b, c], simetrala [c, a]] // Simplify

True

Preveriti moramo še, ali je sečišče simetral res enako oddaljeno od oglišč:

sredisceOcrtane = tocka [simetrala [a, b], simetrala [b, c]] // Simplify

$$\text{tocka} \left[\frac{x_3^2 (-y_1 + y_2) + x_2^2 (y_1 - y_3) - (x_1^2 + (y_1 - y_2) (y_1 - y_3)) (y_2 - y_3)}{2 (x_3 (-y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_1 (-y_2 + y_3))}, \frac{x_1^2 (x_2 - x_3) + x_2^2 x_3 + x_3 (-y_1^2 + y_2^2) - x_2 (x_3^2 - y_1^2 + y_3^2) + x_1 (-x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2)}{2 (x_3 (-y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_1 (-y_2 + y_3))} \right]$$

razdalja2 [a, sredisceOcrtane] ==**razdalja2 [b, sredisceOcrtane] ==****razdalja2 [c, sredisceOcrtane] // Simplify**

True

Definirajmo še funkcijo, ki izračuna očrtano krožnico:

ocrtanaKroznica [trikotnik [p_, q_, r_]] :=**kroznica [tocka [simetrala [p, q], simetrala [q, r]],****razdalja [r, tocka [simetrala [p, q], simetrala [q, r]]]]**

ocrtanaKroznica [trikotnik [a, b, c]] // Simplify

$$\text{kroznica} \left[\text{tocka} \left[\frac{x_3^2 (-y_1 + y_2) + x_2^2 (y_1 - y_3) - (x_1^2 + (y_1 - y_2) (y_1 - y_3)) (y_2 - y_3)}{2 (x_3 (-y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_1 (-y_2 + y_3))}, \right. \right. \\ \left. \frac{x_1^2 (x_2 - x_3) + x_2^2 x_3 + x_3 (-y_1^2 + y_2^2) - x_2 (x_3^2 - y_1^2 + y_3^2) + x_1 (-x_2^2 + x_3^2 - y_2^2 + y_3^2)}{2 (x_3 (-y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_1 (-y_2 + y_3))} \right], \\ \frac{1}{2} \sqrt{\left((x_1^2 (x_2 - x_3) + x_2^2 x_3 + x_2 (-x_3^2 + (y_1 - y_3)^2) - x_1 (x_2^2 - x_3^2 + (y_2 - y_3)^2) - x_3 (y_1 - y_2) \right. \\ \left. (y_1 + y_2 - 2 y_3) \right)^2 + (x_3^2 (y_1 - y_2) + x_2^2 (y_1 - y_3) + 2 x_1 x_3 (y_2 - y_3) - (x_1^2 + (y_1 - y_2) (y_1 - y_3)) \\ \left. (y_2 - y_3) + 2 x_2 x_3 (-y_1 + y_3) \right)^2 \Big/ (x_3 (-y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_1 (-y_2 + y_3))^2 \Big]} \right]$$

Narišimo sliko:

koordinate = {x₁ → 0, y₁ → 0, x₂ → 7, y₂ → -1, x₃ → 3, y₃ → 4};

Show [slika [{
trikotnik [a, b, c],
RGBColor [0, 0, 1],
simetrals [b, a],
simetrals [b, c],
simetrals [c, a],
sredisceOcrtane,
RGBColor [1, 0, 0],
ocrtanaKroznica [trikotnik [a, b, c]] /. koordinate], PlotRange → {{-1, 8}, {-4, 5}}];

Višinska točka

Izrek: Višine trikotnika se sekajo v skupni točki visinskaTočka, ki se imenuje višinska točka trikotnika.

Definirajmo višine trikotnika:

visinaA = pravokotnica [premica [b, c], a]
visinaB = pravokotnica [premica [c, a], b]
visinaC = pravokotnica [premica [a, b], c]

premica [-x₂ + x₃, -y₂ + y₃, x₁ (-x₂ + x₃) + y₁ (-y₂ + y₃)]

premica [x₁ - x₃, y₁ - y₃, x₂ (x₁ - x₃) + y₂ (y₁ - y₃)]

premica [-x₁ + x₂, -y₁ + y₂, (-x₁ + x₂) x₃ + (-y₁ + y₂) y₃]

Višine so konkurentne:

konkurentneQ [visinaA, visinaB, visinaC] // Simplify

True

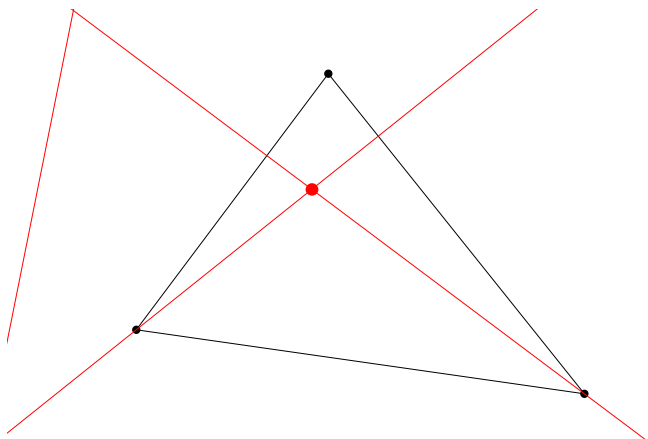
Višinska točka:

visinskaTočka = točka [visinaA, visinaB] // Simplify

$$\text{tocka} \left[\frac{(x_2 x_3 + (y_1 - y_2) (y_1 - y_3)) (y_2 - y_3) + x_1 (x_2 (y_1 - y_2) + x_3 (-y_1 + y_3))}{x_3 (-y_1 + y_2) + x_2 (y_1 - y_3) + x_1 (-y_2 + y_3)}, \right. \\ \left. \frac{(-x_2 + x_3) (x_2 (x_1 - x_3) + y_2 (y_1 - y_3)) - (x_1 - x_3) (x_1 (-x_2 + x_3) + y_1 (-y_2 + y_3))}{x_3 (y_1 - y_2) + x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (-y_1 + y_3)} \right]$$

Slika:

```
Show[
  slika[{trikotnik[a, b, c], RGBColor[1, 0, 0], visinaA, visinaB, visinaC, visinskaTocka} /.
    koordinate], PlotRange -> {{-2, 8}, {-2, 5}}]
```



Težišče

Izrek: Težiščnice trikotnika se sekajo v eni točki, ki se imenuje **težišče**.

Definiramo tezišcnice:

```
teziscnicaA = daljica[a, razpolovisce[b, c]]
teziscnicaB = daljica[b, razpolovisce[c, a]]
teziscnicaC = daljica[c, razpolovisce[a, b]]
```

```
daljica[tocka[x1, y1], tocka[1/2 (x2 + x3), 1/2 (y2 + y3)]]
```

```
daljica[tocka[x2, y2], tocka[1/2 (x1 + x3), 1/2 (y1 + y3)]]
```

```
daljica[tocka[x3, y3], tocka[1/2 (x1 + x2), 1/2 (y1 + y2)]]
```

Preverimo, ali se sekajo v eni točki:

```
konkurentneQ[
  nosilka[teziscnicaA],
  nosilka[teziscnicaB],
  nosilka[teziscnicaC]
] // Simplify
```

True

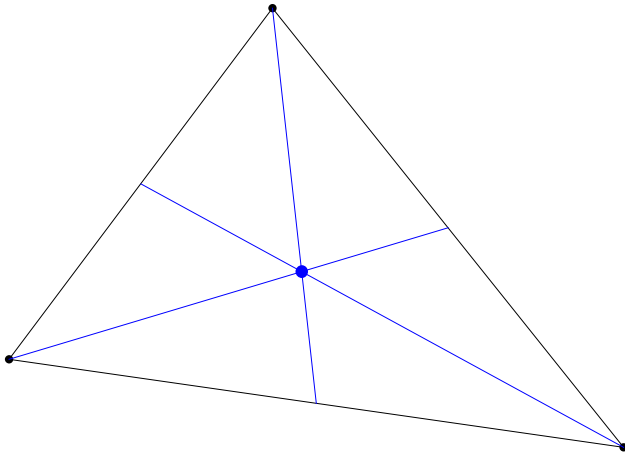
Definirajmo težišče:

```
tezisce =
  tocka[nosilka[teziscnicaA], nosilka[teziscnicaB]] // Simplify
```

```
tocka[1/3 (x1 + x2 + x3), 1/3 (y1 + y2 + y3)]
```

In še slika:

```
Show[slika[{trikotnik[a, b, c], RGBColor[0, 0, 1],
  tezisnicaA, tezisnicaB, tezisnicaC, tezisce} /. koordinate]]
```



Eulerjeva premica

Izrek:

Središče očrtanega kroga, višinska točka in težišče trikotnika ležijo na skupni premici, ki se imenuje Eulerjeva premica trikotnika. Težišče deli daljico med središčem očrtanega kroga in višinsko točko v razmerju 1:2.

Dokaz z Mathematico je zelo preprost:

```
pripadaQ[tezisce,
  premica[sredisceOcrtane, visinskaTocka]] // Simplify
```

True

Preverimo še, v kakšnem razmerju deli težišče daljico med središčem očrtane krožnice in višinsko točko:

```
razdalja[tezisce, sredisceOcrtane]
  ----- // Simplify
  razdalja[tezisce, visinskaTocka]
```

$$\frac{1}{2}$$

Na koncu narišimo še lepo sliko, ki prikazuje vse, kar smo povedali:

```
a /. koordinate
```

```
tocka[0, 0]
```

```
?? Text
```

Text[*expr*] displays with *expr* in plain text format.

Text[*expr*, *coords*] is a graphics primitive

that displays the textual form of *expr* centered at the point specified by *coords*. >>

```
Attributes[Text] = {Protected, ReadProtected}
```

```
Options[Text] = {Background -> None, ContentSelectable -> Automatic, FormatType -> Automatic}
```

```
Show[slika[
  {trikotnik[a, b, c], Text["A", {0, 0}, {1, 0}], daljica[visinskaTocka, sredisceOcrane],
  RGBColor[0, 1, 0], visinaA, visinaB, visinaC, visinskaTocka, RGBColor[1, 0, 0],
  ocranaKroznica[trikotnik[a, b, c]], simetrana[a, b], simetrana[b, c],
  simetrana[c, a], sredisceOcrane, RGBColor[0, 0, 1], teziscnicaA, teziscnicaB,
  teziscnicaC, tezisce} /. koordinate], PlotRange -> {{-1, 8}, {-4, 6}}]
```

